FUNCIONES RACIONALES

Las funciones racionales son del tipo:

$$f\,(_x) = \frac{P(_x)}{Q(_x)}$$

Donde P(x) y Q(x) son a su vez funciones polinómicas. (Fijate entonces que una función racional NO ES POLINOMICA)
Por ejemplo:

$$y = \frac{2x^2 + 3x - 4}{\frac{1}{2}x - 3} \qquad y = \frac{5x^4 - 6x^2}{x^5 + x^3} \qquad y = \frac{2x - 3}{x^3 + x^2 - x}$$

Observamos que, tanto en el numerador como en el denominador se encuentran diversas funciones polinómicas.
El estudio de las funciones racionales es muy importante pues la mayoría de las situaciones que ofrece el cálculo matemático se basa en el análisis de estas funciones. Veamos las diferentes características de las mismas, definiendo y/o repasando algunos conceptos vistos anteriormente en otros temas.

Sabemos y conocemos que a un polinomio se lo puede "*factorizar*", esto es, descomponerlo en un producto de otros polinomios primos, y que el resultado de esa factorización es la obtención de las raíces de ese polinomio, o lo que es lo mismo, los valores que lo anulan.

Aquí, visualizamos ya algo importante.

Evidentemente, el polinomio que se encuentra en el denominador NO DEBE ANULARSE PARA NINGÚN VALOR DE *x* PUES SINO ESTAREMOS DIVIDIENDO EL NUMERADOR POR "**0**", LO QUE NO TIENE SENTIDO.

Otro concepto que debemos considerar es el de las rectas asíntotas, que eran aquellos ejes imaginarios a los cuales las funciones se acercan pero no tocan ni traspasan.

Todos los conceptos anteriores nos han de servir para determinar, en las funciones racionales, los valores de DOMINIO (***eje x***), IMAGEN (***eje y***), CONJUNTO DE "0" (***raíces***), INTERVALOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD (***en el eje y***), etc.

Analicemos entonces una función racional…
Ya conocemos que es de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Por lo tanto será mejor verla con un ejemplo numérico…
(obviamente los conceptos serán aplicables a TODOS los casos de aquí en adelante…)

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

en primer lugar factoricemos (hallemos las raíces…) ambas funciones…
La del numerador es una parábola por lo tanto hallémosle las raíces:

$$x^2 - 3x + 2 \longrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2\,.\,1} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Y escribamos la forma factorizada:

$$(x - 2)\,.\,(x - 1)$$

Hagamos lo propio con la diferencia de cuadrados del denominador:

$$x^2 - 1 = (x - 1)\,.\,(x + 1)$$

volvamos a escribir ahora la función racional pero con los términos anteriores, es decir con las factorizaciones:

$$y = \frac{(x-2)\,.\,(x-1)}{(x-1)\,.\,(x+1)}$$

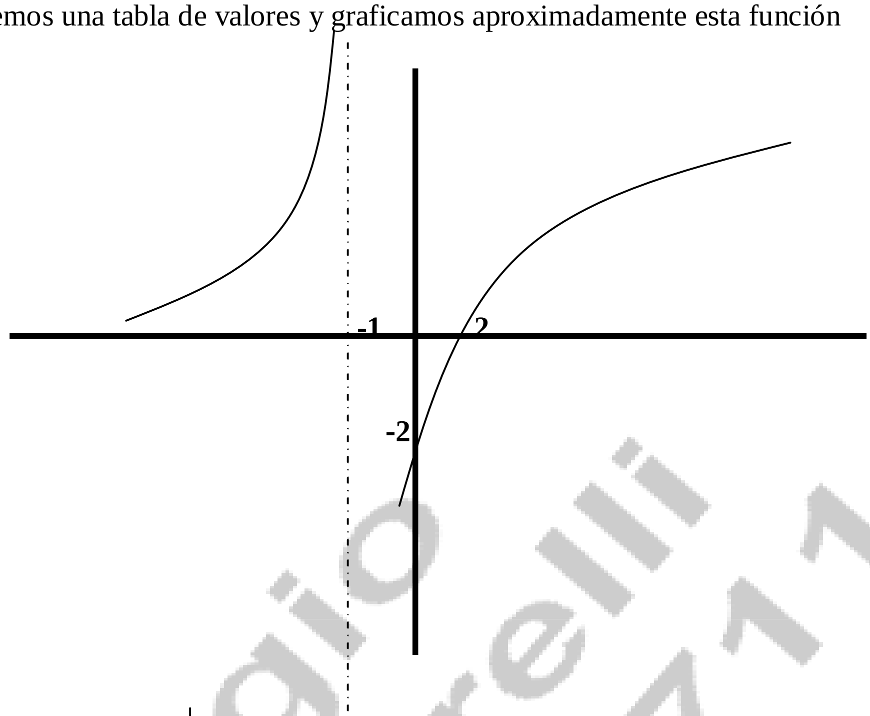
Y analicemos un instante esta expresión:

Vemos que el factor $(x - 1)$ se encuentra tanto en el numerador como en el denominador, razón por la cual puede simplificarse, quedando entonces la expresión:

$$y = \frac{(x-2)}{(x+1)}$$

Esta función se llama ***EXPRESION RACIONAL EQUIVALENTE*** de la primera, pues evidentemente ha salido de la simplificación de ella

Hacemos una tabla de valores y graficamos aproximadamente esta función



x	$y = \dfrac{(x-2)}{(x+1)}$
0	**-2**
1	**- ½**
2	**0**
3	**¼**
4	**2/5**
-1	**¿¿¿???**
-2	**4**
-3	**5/2**
-4	**2**

Observamos que, cuando el valor de *x* es igual a **-1**, se anula el denominador (tal como lo expresamos anteriormente…). Por lo tanto, en ese valor de *x*, NO EXISTIRA IMAGEN EN EL EJE *y* PUES NO SE PUEDE DIVIDIR POR "0".
Al graficar la función observamos que, en ese valor, existe "un eje imaginario" al cual la función se acerca pero no atraviesa ni rebota.
ESTE VALOR ENTONCES NOS MUESTRA UNA ASINTOTA VERTICAL.

Entonces, aquí daremos una definición importante:

ASINTOTAS VERTICALES

SON LOS NUMEROS QUE ANULAN EL DENOMINADOR DE UNA FUNCIÓN PERO NO SIMULTANEAMENTE EL NUMERADOR DE LA MISMA.

¿Cómo es esto?

Solamente se consideran los números que anulen el denominador SOLO, no aquellos que anulan al mismo tiempo el numerador y denominador.
En la función factorizada, ANTES DE SIMPLIFICAR, se observa este detalle.
El valor de x igual a **1** ANULA SIMULTANEAMENTE DENOMINADOR Y NUMERADOR, por lo tanto NO ES ASINTOTA VERTICAL de la función.

El valor de la Asíntota Vertical $\mathbf{A_V}$, RESTRINGE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN.
¿cómo es eso?
Para este valor, NO EXISTE IMAGEN DE LA FUNCIÓN, por lo tanto, en este ejemplo, la función se cumple **PARA TODOS LOS VALORES DE *x* MENOS PARA EL -1.**
Si escribiésemos lo anterior en símbolos diremos que:

$$\text{Dom. } f_{(x)} = \mathbf{R} - \{-1\}$$

Analicemos ahora un poco el numerador.
Como ya dijimos que un mismo valor de x no debe anular al mismo tiempo numerador y denominador, descartamos esta posibilidad al factorizar.
Pero, ahora bien…
¿Qué pasa con los valores de x que anulen solamente al numerador?
Estos valores SON LAS RAICES DE LA FUNCIÓN, es decir LOS PUNTOS DONDE LA FUNCIÓN ATRAVIESA EL EJE x.

En nuestro ejemplo la única raíz es el valor 2 de y, pues si miramos la tabla corresponde al mismo, el valor 0 de x.
Entonces:

Raíces o conjunto de “0” = {**2**}

Por lo tanto:
LAS RAÍCES DE UNA FUNCIÓN RACIONAL SON LOS VALORES QUE ANULAN EL NUMERADOR DE LA MISMA.

Otro valor importante lo constituye el corte al eje *y*, ya conocido como *ORDENADA AL ORIGEN*. El mismo se daba para cuando *x* vale 0, por lo tanto en nuestro caso ese valor es **-2**
Por lo tanto:

Ordenada al origen = {**-2**}

En algunas funciones, además, puede registrarse también en forma horizontal alguna recta imaginaria a la cual la función se acerca pero no traspasa ni rebota.

Ese eje se llama:

ASINTOTA HORIZONTAL A_H

La asíntota horizontal ***ES UNA SOLA, NO HAY MAS DE UNA. O BIEN NO HAY NINGUNA.***

Para calcularla se tienen en cuenta los grados de las funciones polinómicas.

Este valor se ubica sobre el eje y, por lo tanto la recta resultante es paralela al eje de la *x*.

Así, tenemos que:

$$f_{(x)} = \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$$

La A_H se obtiene de la siguiente forma:

Si grado de P ($_x$) es *mayor* que el grado de Q ($_x$) $\longrightarrow$ **A_H = NO TIENE**

Si grado de P ($_x$) es *menor* que el grado de Q ($_x$) $\longrightarrow$ **A_H = 0 (COINCIDE CON EL EJE x)**

Si grado de P ($_x$) es *igual* que el grado de Q ($_x$) $\longrightarrow$ **$A_H = \dfrac{\text{COEFIC. PRINCIPAL } P_{(x)}}{\text{COEFIC. PRINCIPAL } Q_{(x)}}$**

IMPORTANTE:
**NO TODAS LAS FUNCIONES TIENEN ASINTOTA HORIZONTAL.
ADEMAS OBSERVEMOS QUE, A DIFERENCIA DE LAS ASINTOTAS VERTICALES, LA FUNCIÓN LA PUEDE ATRAVESAR.
SIEMPRE CONVIENE GRAFICAR LA FUNCIÓN PARA CORROBORAR QUE LA POSEA O NO. HAY CASOS EN QUE EXISTE Ah PERO LA FUNCION LA ATRAVIESA IGUAL. SON FUNCIONES ESPECIFICAS (Ej. $x+1/x^2$)**

¿CUÁL SERÁ ENTONCES LA ASINTOTA HORIZONTAL DE LA FUNCIÓN ANTERIOR?
Hallarla y completar el gráfico.

A propósito, conociendo todos estos temas, ¿cómo se grafica una función racional a partir de conocer las A_V, la A_H, Raíces, Ordenada al origen, etc.?

Muy fácil.
Las A_V y A_H nos servirán como guías para tomar intervalos entre ellas y confeccionar una tabla aproximada que nos permita graficar la función.

RESUMIENDO:
Para operar con FUNCIONES RACIONALES debo:

1- **FACTORIZAR EL NUMERADOR Y DENOMINADOR**
2- **REEMPLAZAR EN LA FUNCIÓN ORIGINAL Y OBSERVAR QUE FACTORES PUEDEN SIMPLIFICARSE**
3- **BUSCAR LAS AV** (*valores que anulen el denominador*)**Y LA AH** (*de acuerdo a los grados de los polinomios numerador y denominador*) **QUE CORRESPONDAN Y SI HUBIERA**
4- **BUSCAR LAS RAÍCES** (*valores que anulen el numerador*)
5- **BUSCAR LA ORDENADA AL ORIGEN (***valor de x=0***)**
6- **GRAFICAR LA FUNCIÓN CON TODOS ESTOS DATOS Y ESCRIBIR LAS CONCLUSIONES EN FORMA SIMBÓLICA.**
7- **TENER EN CUENTA QUE SI LA MULTIPLICIDAD ES PAR (2,4,6,ETC), LA FUNCION REBOTA SOBRE EL EJE X, SI ES IMPAR (3,5,ETC), ATRAVIESA EL EJE X**